

Komplexe Zahlen

Einordnung in algebraische Strukturen und geometrische Darstellung

? Spielerei oder lässt sich \mathbb{C} in mathematische Strukturen einordnen? – Körper

Definition – Komplexe Zahl

Eine komplexe Zahl ist ein Tupel $z = (a, b)$, mit $a, b \in \mathbb{R}$ sind.

Addition und Multiplikation der komplexen Zahlen ist definiert als:

$$z_1 + z_2 = (a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$$

$$z_1 z_2 = (a_1, b_1)(a_2, b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

Für jede komplexe Zahl $z = (a, b)$ nennen wir a den **Realteil** und b den **Imaginärteil** von $z = (a, b)$.

Im Folgenden werden wir den Satz beweisen, dass \mathbb{C} ein Körper ist. Hierfür müssen wir zeigen, dass alle geforderten Eigenschaften erfüllt sind.

- Welche Eigenschaften müssen erfüllt sein?
- Zeigen Sie, dass die Eigenschaften erfüllt sind.

Hilfestellung

Zeigen Sie, dass ...

- ... \mathbb{C} bezüglich der Addition und Multiplikation abgeschlossen ist.
- ... die Addition und Multiplikation in \mathbb{C} kommutativ ist.
- ... ein *neutrales Element* $e_+ \in \mathbb{C}$ für die Addition gibt.
- ... zu jedem $z \in \mathbb{C}$ ein *inverses Element* bezüglich der Addition gibt.
- ... ein *neutrales Element* $e \in \mathbb{C} \setminus e_+$ für die Multiplikation gibt.
- ... zu jedem $z \in \mathbb{C} \setminus e_+$ ein *inverses Element* bezüglich der Multiplikation gibt.
- ... das Assoziativgesetz in \mathbb{C} gilt.
- ... das Distributivgesetz in \mathbb{C} gilt.

- Siehe Hinweis.
- Die in \mathbb{C} definierte Addition ist identisch mit der Addition im Vektorraum \mathbb{R}^2 (d.h. der komponentenweisen Addition). Daher ist $(\mathbb{C}, +)$ eine abelsche Gruppe mit dem Nullelement $(0,0)$. Die Multiplikation ist kommutativ, und $(1,0)$ ist ein neutrales Element. Es sei ein Element $(a, b) \neq (0,0)$ in \mathbb{C} gegeben. Dann gilt $a^2 + b^2 > 0$.

Daher ist

$$(a, b)^{-1} := \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2} \right) \quad (3.1)$$

ein wohldefiniertes Element von \mathbb{C} . Aus der Definition der Multiplikation in \mathbb{C} folgt

$$(a, b) \cdot (a, b)^{-1} = \left(a \cdot \frac{a}{a^2 + b^2} - b \cdot \frac{-b}{a^2 + b^2}, -a \cdot \frac{b}{a^2 + b^2} + b \cdot \frac{a}{a^2 + b^2} \right) = (1, 0)$$

Somit ist jedes von Null $(0,0)$ verschiedene Element aus \mathbb{C} bezüglich der Multiplikation invertierbar. Der Nachweis der Assoziativität der Multiplikation ist aufwendig. (Dies ist eine der eher seltenen Situationen, in denen man das Assoziativgesetz wirklich nachprüfen muss und es nicht von vornherein „offensichtlich“ ist).

Man berechnet für alle $(a, b), (c, d), (x, y) \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} ((a, b) \cdot (c, d)) \cdot (x, y) &= (ac - bd, ad + bc) \cdot (x, y) \\ &= (acx - bdx - ady - bcy, acy - bdy + adx + bcx) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} (a, b) \cdot ((c, d) \cdot (x, y)) &= (a, b) \cdot (cx - dy, cy + dx) \\ &= (acx - ady - bcy - bdx, acy + adx + bcx - bdy) \end{aligned}$$

also

$$((a, b) \cdot (c, d)) \cdot (x, y) = (a, b) \cdot ((c, d) \cdot (x, y)).$$

Dies zeigt die Assoziativität der Multiplikation. Die Gültigkeit des Distributivgesetzes ergibt sich aus

$$\begin{aligned} ((a, b) + (c, d)) \cdot (x, y) &= (a + c, b + d) \cdot (x, y) \\ &= (ax + cx - by - dy, ay + cy + bx + dx) \\ &= (ax - by, ay + bx) + (cx - dy, cy + dx) \\ &= (a, b) \cdot (x, y) + (c, d) \cdot (x, y). \end{aligned}$$

Damit haben wir die Aussage, dass die komplexen Zahlen $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ als Erweiterung der reellen Zahlen $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ein Körper sind, bewiesen.

? Spielerei oder lässt sich \mathbb{C} in mathematische Strukturen einordnen? – Reelle Zahlen

Zeigen Sie mithilfe einer geeigneten Abbildung, dass sich \mathbb{R} in \mathbb{C} einbetten lässt.

Leiten Sie daraus die algebraische Schreibweise $z = a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ ab.

Die Abbildung $h: x \mapsto (x, 0)$ bettet \mathbb{R} in \mathbb{C} ein:

Seien $x, y, w \in \mathbb{R}$, dann gilt:

$$\begin{aligned} (x, 0) + (w, 0) &= (x + w, 0) \\ (x, 0) \cdot (w, 0) &= (xw, 0) \end{aligned}$$

Die Abbildung $h: x \mapsto (x, 0)$ ist bijektiv. Die Umkehrabbildung ist $h^{-1}: (x, 0) \mapsto x$.

Wir definieren $i := (0, 1)$; Es gilt:

$$i^2 = (-1, 0)$$

Mit der Umkehrabbildung folgt $(-1, 0) \rightarrow -1$.

Es folgt:

$$\begin{aligned} (x, y) &= (x, 0) + (0, y) = \\ &= (x, 0) + (y, 0) \cdot (0, 1) \\ &= (x, 0) + (y, 0) \cdot i \end{aligned}$$

Es gilt mit der Umkehrabbildung h^{-1} :

$$(x, 0) + (y, 0) \cdot i \mapsto a + ib$$

? Geometrische Darstellung der Komplexen Zahlen - Rechenoperation

Nun aber kann der Uebergang auf unendlich viele Arten geschehen: so wie man sich das ganze Reich aller reellen Grössen durch eine unendliche gerade Linie denken kann, so kann man das ganze Reich aller Grössen, reeller und imaginärer Grössen, sich durch eine unendliche Ebene sinnlich machen, worin jeder Punkt, durch Abscisse $= a$ Ordinate $= b$ bestimmt, die Grösse $a + bi$ gleichsam repräsentirt. Der stetige Uebergang von einem Werthe von x zu einem andern $a + bi$ geschieht demnach durch eine Linie und ist mithin auf unendlich viele Arten möglich. Ich behaupte nun, dass das Integral für die nach zwei verschie-

Betrachten Sie die Rechenoperationen in dem Applet.

Welche Unterschiede bzw. Gemeinsamkeiten lassen sich zu den Operationen in \mathbb{R}^2 beobachten?

Die Gauß'sche Zahlenebene ist **isomorph** zu \mathbb{R}^2 :

$$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C} \text{ mit } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto (x, y); x, y \in \mathbb{R}$$

Folglich können die komplexen Zahlen als Vektoren im \mathbb{R}^2 interpretiert werden, sodass Addition und Subtraktion denen von Vektoren entsprechen.

Die Multiplikation mit einer komplexen Zahl

Für die Multiplikation bzw. Division gibt es kein entsprechendes Pendant. Im Gegensatz zur komponentenweisen Multiplikation in \mathbb{R}^2 entspricht die Multiplikation einer Skalierung und Rotation im \mathbb{R}^2 , was mit linearen Abbildungen im zweidimensionalen Raum vergleichbar ist.



Geometrische Darstellung der Komplexen Zahlen – Komplexe Konjugation

Veranschaulichen Sie die komplexe Konjugation in der Gaußschen Zahlenebene. Welche bekannte Abbildung steckt dahinter?

Die Komplexe Konjugation entspricht einer Spiegelung an der Achse der reellen Zahlen.

